Асимптотические методы – странная тема. На потоке Лукьяненко её нет (и, я считаю, заслуженно, потому что на будет на ОММ), на других есть. Методичка странная ещё и потому, что я просто взял свою методичку по ОММ и адаптировал её под дифуры. Это оправдано, т.к. вам рассказывают одно и то же. У ФФ гениальная программа. Чтите традиции! ☺

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \quad y(0, \mu) = y^0$$

μ – некий малый параметр. Например,

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}0027yt + t + \mathrm{y}^{0{,}0027}$$

Где μ, очевидно, 0,0027:

$$\frac{dy}{dt} = \mu yt + t + \mathrm{y}^{\mu}$$

Решать такое ДУ сложно. А можно его как-нибудь упростить? Положить μ=0 – тогда правая часть упростится, ух как упростится. Т.е. решать вот такое вот

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = f(\overline{y}, t, 0), \quad \overline{y}(0) = y^0$$

В нашем случае это будет

$$\frac{dy}{dt} = t + 1$$

Не могу не рассказать тру стори. Был у нас в 11-м классе один товарищ-приколист. Заходит он как-то на английский:

Приколист: Здорово, гнилые!!!

Учитель: Выйди и зайди нормально!

Приколист (выходит, заходит): Разрешите войти, товарищ…

Вот тут у нас то же самое – с правой частью $0{,}0027yt + t + \mathrm{y}^{0{,}0027}$ чёт не особо нам хочется решать («здорово, гнилые!»), поэтому «выйди и зайди нормально», т.е. полагаем μ=0 и получаем

$$\frac{dy}{dt} = t + 1$$

Вот так уже норм! Такое решить очень легко:

dy= dt(t+1)=d(t+1)*(t+1)=d$\frac{(t+1)^2}{2}$,

y=$\frac{(t+1)^2}{2}$+const.

Мы получили решение в нулевом приближении - $\overline{y}(t)$.

А теперь вернемся к исходному ДУ. Можно ли, зная $\overline{y}(t)$, получить решение уже для малых, но нулевых μ? Т.е. мы считаем, что для малых μ решением будет $\overline{y}(t)$ + некоторая малая добавка:

$$y(t,\mu)=\overline{y}(t)+\varepsilon(t,\mu),$$

где *ε(t,μ)* =>0 при $\mu\to 0.$

Эта формулы называется асимптотической.

Физических аналогий тут придумать можно много. К примеру, μ может отвечать за трение. Оно мало, но всё-таки хотелось бы его как-нибудь учесть в решении.

В реальных задачах μ конечно => в отличие от всяких разностных схем, где мы можем устремлять шаг по сетке к нулю и получать сколь угодную нам точность, в асимптотических в силу конечности μ есть предельная точность.

Обычно для получения решения раскладывают f(,,) и y() в ряд Тейлора

$$f(y,t,\mu)=f_0(y,t,0)+\mu f_1(y,t,0)+\mu^2 f_2(y,t,0)+\dots,$$

$$y(t)=y_0(t)+\mu y_1(t)+\mu^2 y_2(t)+\dots$$

После чего находят $y_1(t)$, $y_2(t)$ по стрёмным формулам. Кстати, как раз в силу конечности μ ряд для y(t) может и не сойтись. Обычно, так как всё это решается на компуктерах, а компудахтеры могут работать лишь с конечными рядами, а не бесконечными, то в разложении ограничиваются k+1 слагаемыми

Теперь немного о терминологии.

Возмущение (они же остаточные члены) – это всё то, что мы отбросили, когда переходили от

$$\frac{dy}{dt}=f(y,t,\mu),\quad y(0,\mu)=y^0$$

$$\frac{d\overline{y}}{dt}=f(\overline{y},t,0),\quad \overline{y}(0)=y^0$$

Если характер решения не сильно поменялся, то это возмущение регулярное. А если сильно, то сингулярное. Вот, например, вот такие колебания с трением

$$\begin{cases} \mu y'' + \alpha y' + ky = f(t), \\ y(0) = y_0^0; \quad y'(0) = y_1^0, \end{cases}$$

Вообще дифур у нас второго порядка, но если положить μ=0, будет дифур первого ☺ Очевидно, что решение в этом случае поменяется прям сильно, поэтому сингулярное возмущение.

У сингулярных возмущений есть свои приколы:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{dy}{dt} = f(y,t), \quad 0 < t \le T \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

При μ не равным 0 у нас ДУ, а согласно теореме из 4 сема, решение единственное.

А если μ=0, то имеем 0=f(y,t). Это алгебраическое уравнение, и у него запросто может быть несколько решений (у квадратного, например, два): $\overline{y}_i = \phi_i(t)$. К какому из них (единственному!) стремится решение y(t) при μ->0? Если оно вообще стремится…

Это вот, знаете, как трогательный момент выбора наставника на «Голосе»

(в наставниках, напомню сидят решения уравнения f(y,t)=0).

Теорема: y(t) пойдёт к тому наставнику-$\varphi_i(t)$, если

а) Начальное значение y_0 лежит в т.н. области влияния – область, где интегральные кривые направлены в сторону $\varphi_i(t)$ (это условие обычно несущественно, в отличие от следующего) б) Выполнено условие устойчивости: $\frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi(t),t) < 0$, которое гораздо удобнее записать и использовать как $\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\varphi(t)} < 0$.

Попутно мы ответили на

Потренируемся на примере:

$$\mu \frac{dy}{dt} = y - y^2$$

В данном уравнении

$$f(y,t) = y - y^2$$

И очевидны два корня: y=0 и y=1. Т.е. у нас повернулось два наставника:

Поэтому проверяем условие $\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\varphi(t)} < 0$. Считаем производную:

$$\frac{\partial(y - y^2)}{\partial y} = 1 - 2y$$

При y=0 получаем 1, т.е. >0 – не, этот наставник неустойчив, не пойду к нему.

При y=0 получаем -1, т.е. <0 – о, устойчивость, побежали к нему!

Так вот, это была популярная интерпретация теоремы Тихонова, которая есть вот туть http://math.phys.msu.ru/data/57/N.N._Nefedov_V.YU._Popov_V.T._Volkov_Differentsialnie_uravneniya._Kurs_lektsiy.pdf (да, вам придётся это говно выучить):

Теорема 2 (*теорема А.Н.Тихонова*). *Пусть*:

1) функции $F(z,y,x)$, $f(z,y,x)$, F'_z, F'_y, f'_z, f'_y – непрерывны в некоторой области трех переменных (z,y,x): $G=\bar{D}\times Z$, ; $(y,x)\in\bar{D}$, $z\in Z$;
2) функции $\varphi(y,x)$, $\varphi'_y \in C(\bar{D})$;
3) существует решение задачи (10) $y=\bar{y}(x)$ на сегменте $0\le x\le H$;
4) корень $\varphi(y,x)$ является устойчивым в области $\bar{D}$, т.е. $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi(\bar{y},x)}<0$;
5) начальное значение z^0 принадлежит области влияния устойчивого корня $\varphi(y^0,x)$ уравнения $F(z^0,y^0,0)=0$, т.е. если $\varphi_1(y,x)$ и $\varphi_2(y,x)$ – два ближайших к $\varphi(y,x)$ корня соответственно снизу и сверху, то необходимо, чтобы начальное значение z^0 лежало в интервале $\left(\varphi_1(y^0,x)\,;\,\varphi_2(y^0,x)\right)$, называемой *областью влияния (или областью притяжения)* корня $\varphi(y,x)$.

Тогда:

1) существует решение $z(x,\mu)$, $y(x,\mu)$ задачи (8), определенное на сегменте $0\le x\le H$;
2) имеет место предельный переход

$$\lim_{\mu\to+0} y(x,\mu)=\bar{y}(x), \qquad 0\le x\le H,$$

$$\lim_{\mu\to+0} z(x,\mu)=\varphi(\bar{y}(x),x), \qquad 0< x\le H,$$

где $\bar{y}(x)$ – решение вырожденной задачи (10).

Букаф много! Но там большинство условий – всякие требования существования, единственности, непрерывности. Смысловую нагрузку в основном несёт четвёртое:

4) корень $\varphi(y,x)$ является устойчивым в области $\bar{D}$, т.е.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi(\bar{y},x)}<0;$$

то самое условие, о котором мы говорили раньше!

И если это так, свершится переход к наставнику:

имеет место предельный переход

$$\lim_{\mu\to+0} y(x,\mu)=\bar{y}(x),$$

Это всё, что вам нужно знать по теме ☺